Analisi Matematica II 12 Aprile 2022

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma... Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \exp(x^3 - 2x^2 + x) + \log(1 + y^2) - 7 \arctan y.$$

Allora f ammette

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: un punto di massimo relativo e un punto di sella $\boxed{\text{B}}$: un punto di minimo relativo e un punto di massimo relativo $\boxed{\text{C}}$: un punto di minimo relativo, un punto di massimo relativo e un punto di sella, $\boxed{\text{D}}$: un punto di minimo relativo e un punto di sella $\boxed{\text{E}}$: due punti di sella

Punteggio: 7

---

2. L'integrale triplo

$$\iiint_V 2z \, dxdydz$$

dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ y \geq 0\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\pi/6$ $\boxed{\text{B}}$: $\pi/3$ $\boxed{\text{C}}$: $\pi/12$ $\boxed{\text{D}}$: $1/6$ $\boxed{\text{E}}$: $1/12$

Punteggio: 6

---

3. Studiare la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \exp(n(x-1)) \frac{\log^{-3}(4n)}{\sqrt{n^5 + n^2 - n^{5/2}}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e siano $f,\ f_n : I \to \mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$. Si supponga che le funzioni f_n siano continue in I. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se f ammette un punto di discontinuità in $x_0 \in I$, allora la successione $\{f_n\}$ non converge uniformemente a f in I.

(b) Se la successione $\{f_n\}$ è uniformemente convergente in I allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente in I.

(c) Considerato un intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset I$, se la successione di funzioni $\{f_n\}$ è puntualmente convergente a f in I, allora vale $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Punteggio: 6

Domanda 2.

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto connesso ma non semplicemente connesso e sia $\vec{F} = (F_1, F_2) : A \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se per ogni $(x,y) \in A$ vale

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0$$

allora $\vec{F}$ è conservativo in A.

(b) Se per ogni curva chiusa Γ regolare a tratti a valori in A vale

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma = 0\,,$$

allora $\vec{F}$ è conservativo in A.

Punteggio: 4
